극좌표계에서의 가우시안 혼합 모델 기반의 색상 분석

Color Analysis based on Gaussian Mixture Models in Polar Coordinate

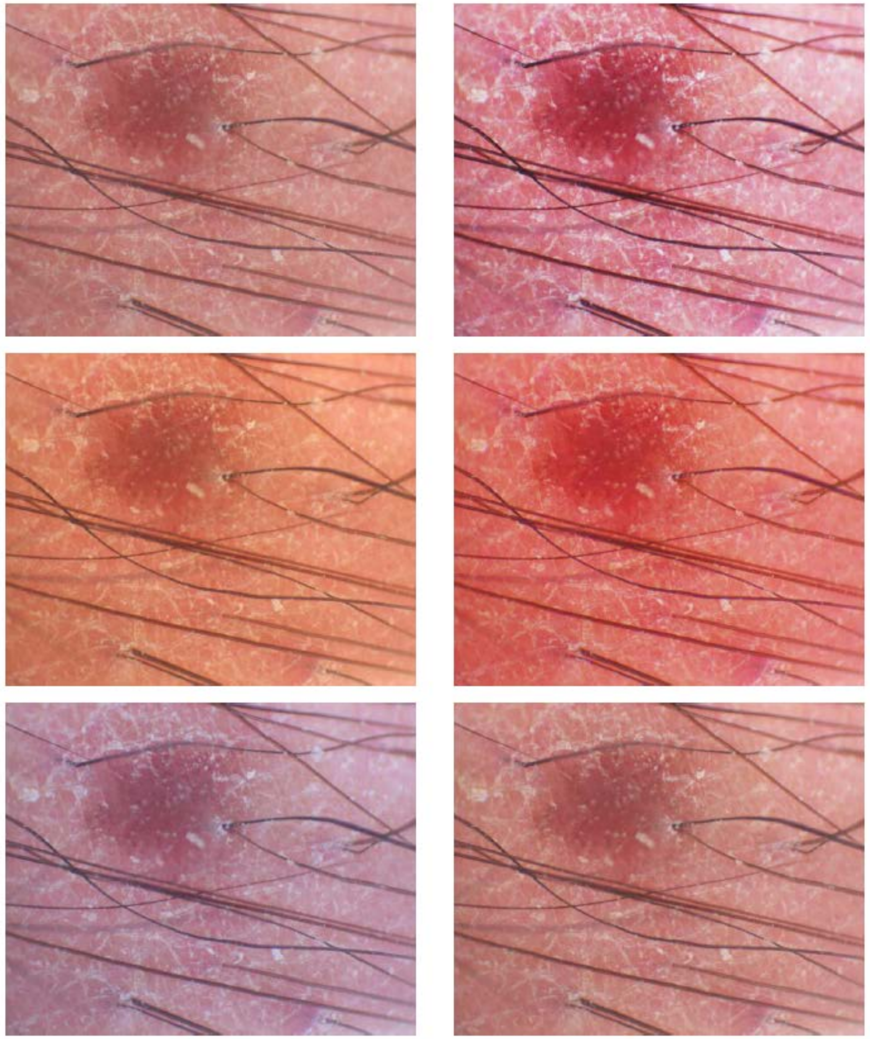
ISL

안재원

CONTENTS

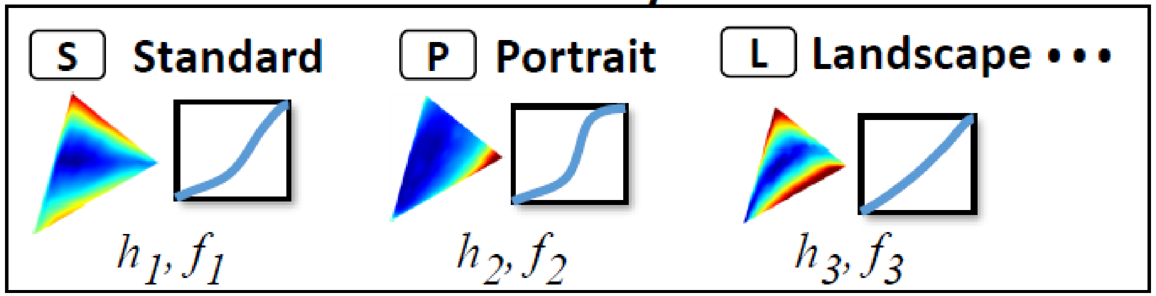
Intro

Color?



Which one is correct?

Picture Styles



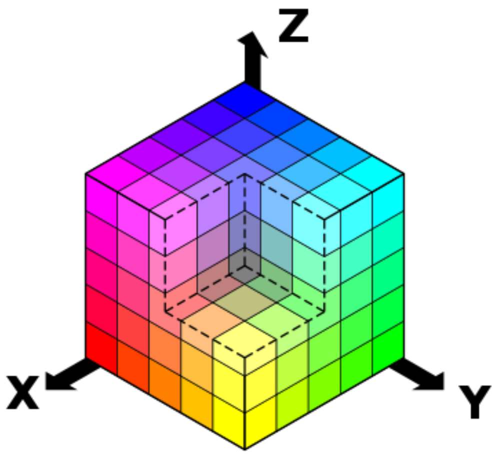
Intro

Hue

RGB 색상 공간

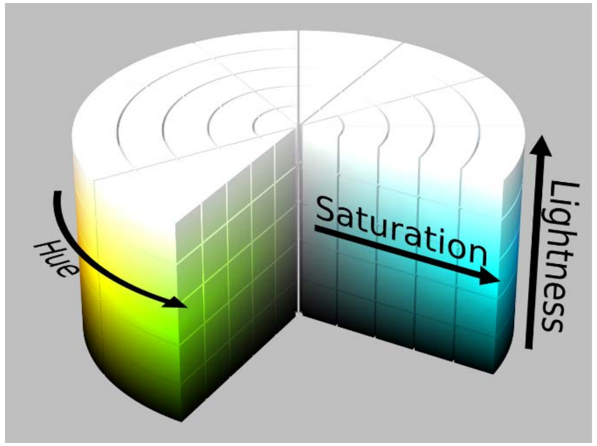
빛의 삼원색인 빨강(Red), 초록(Green), 파랑(Blue)의 3개의 채널을 이용해 각 픽셀의 색상을 표현하는 색상 공간이다.

색상 표현을 위해 3개의 채널이 필요하다.



HLS 색상 공간

색상(Hue), 밝기(Lightness), 채도(Saturation)의 3개의 채널을 이용해 각 픽셀의 색상을 표현하는 색상 공간이다.



색상(Hue)은 순수한 색상 정보를 담고 있으며 0~360°의 색상각으로 표현된다.

밝기(Lightness)는 밝고 어두운 정도를 의미한다. 가장 작은 값은 검정, 가장 큰 값은 흰색이고, 그 사이 값들은 모두 다른 밝기의 회색이다.

채도(Saturation)는 색의 선명한 정도를 의미한다. 작으면 작을 수록 무채색(검정색, 회색, 흰색)에 가까운 색상을 의미한다.

색상 공간 변환(RGB to HLS)

RGB 색상 공간의 각 채널의 값이 0~1의 값을 갖을 때, 아래의 수식을 따라 색상 공간을 변환한다.

$$C_{\max} = \max(R, G, B)$$
$$C_{\min} = \min(R, G, B)$$

$$\underset{(0\sim360^\circ)}{H} = \begin{cases} \dfrac{(G-B)\times 60^\circ}{C_{\max}-C_{\min}} & if \quad C_{\max} = R \\ \dfrac{(B-R)\times 60^\circ}{C_{\max}-C_{\min}} + 120^\circ & if \quad C_{\max} = G \\ \dfrac{(R-G)\times 60^\circ}{C_{\max}-C_{\min}} + 240^\circ & if \quad C_{\max} = B \end{cases}$$

$$\underset{(0\sim1)}{L} = \frac{C_{\max}+C_{\min}}{2}$$

$$\underset{(0\sim1)}{S} = \begin{cases} \dfrac{C_{\max}-C_{\min}}{C_{\max}+C_{\min}} & if \quad L < 0.5 \\ \dfrac{C_{\max}-C_{\min}}{2-(C_{\max}+C_{\min})} & if \quad L \ge 0.5 \end{cases}$$

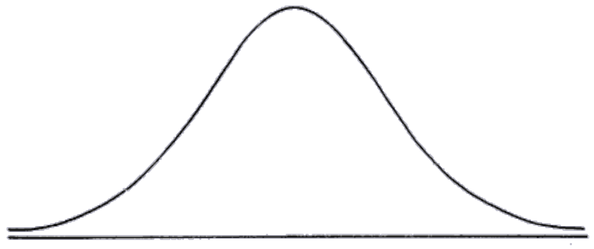
Image System Laboratory

Intro

Gaussian Mixture Models

가우시안 모델

평균 μ와 분산 σ를 사용하는 정규 분포 모델로 독립적인 자연계의 사건은 다음의 형태를 따르는 경우가 많다.



가우시안 모델 예시

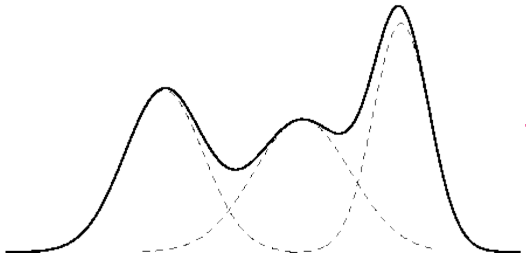
가우시안 모델 수식

$$p(x|\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \{\mu, \sigma\}$$

가우시안 혼합 모델(Gaussian Mixture models)

독립적인 자연계의 사건을 표현하는데 주로 사용하는 가우시안 모델이 어러개 섞인 모델이다.



GMMs 예시

가우시안 혼합 모델 수식

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{M} p(x|\boldsymbol{\omega}_j)P(\boldsymbol{\omega}_j)$$

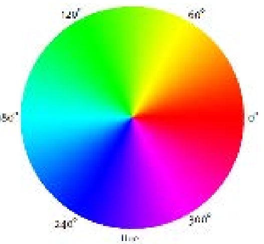
$$P(\boldsymbol{\omega}_j) = \alpha_j \quad ※\ 0 \le \alpha_j \le 1 \quad \sum_{j=1}^{M}\alpha_j = 1$$

$P(\omega_j)$는 ω_j를 사용하는 가우시안 모델의 상대적 중요도

$$\boldsymbol{\theta} = \{\{\omega\cdots\},\{\alpha\cdots\}\}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \{\{\mu\cdots\},\{\sigma\cdots\}\}$$

Froth 영상과 가우시안 혼합 모델

색상 공간 변환
RGB to HLS



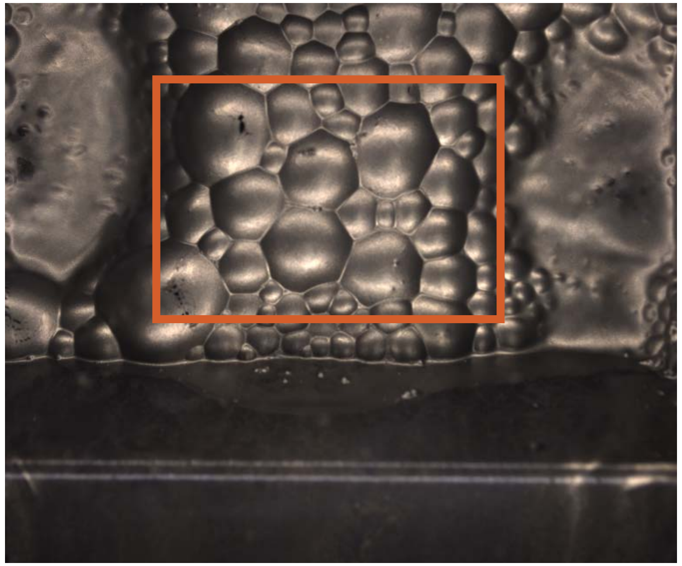
히스토그램 작성

색상(Hue) 채널의 히스토그램

Intro

Process of Color analysis

1. 입력 영상의 관심 영역(ROI) 선정 및 색상 공간 변환

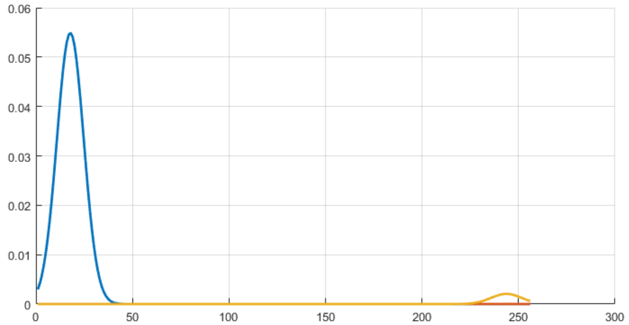


입력 영상과 관심 영역

2. 색상(Hue) 채널의 히스토그램 작성

색상(Hue) 채널의 히스토그램

3. 히스토그램의 가우시안 모델 분석



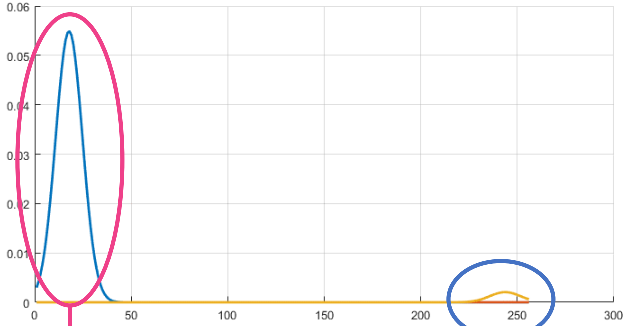
색상 채널에 속한 여러 가우시안 모델

가우시안 혼합 모델로 표현된 색상 채널

4. 색상 분석

가우시안 혼합 모델 : $p(x|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{M} p(x|\boldsymbol{\omega}_j)P(\boldsymbol{\omega}_j)$

ω_j를 사용하는 가우시안 모델의 상대적 중요도



$P(\boldsymbol{\omega}_j) > \tau$

$P(\boldsymbol{\omega}_j) < \tau$

※ τ : 기준값

영상에서 상대적 중요도가 높은 색상 성분을 포함하는 가우시안 모델로 색상 분석에 사용한다.

Intro

Color analysis

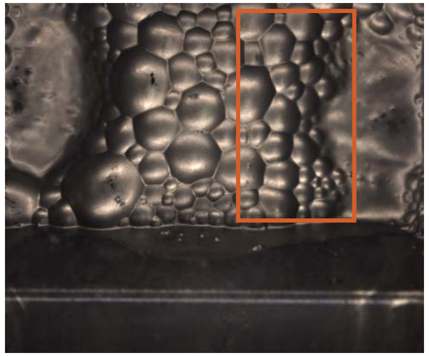
단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 46$

GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.87$

$\mu_j = 14$



단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 25$

GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.96$

$\mu_j = 16$

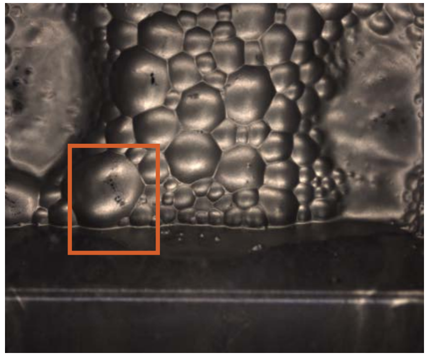
단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 28$

GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.94$

$\mu_j = 15$



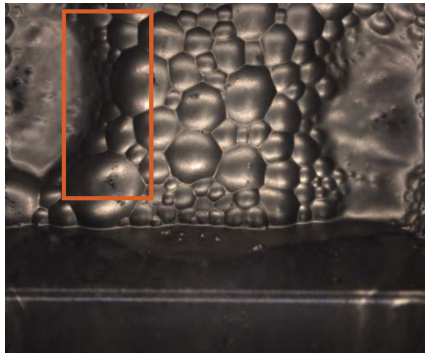
단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 41$

GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.88$

$\mu_j = 14$



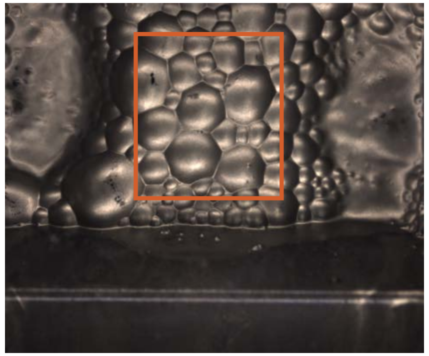
단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 44$

GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.86$

$\mu_j = 13$



단순 평균을 이용한 색상 분석 결과

$\mu = 23$

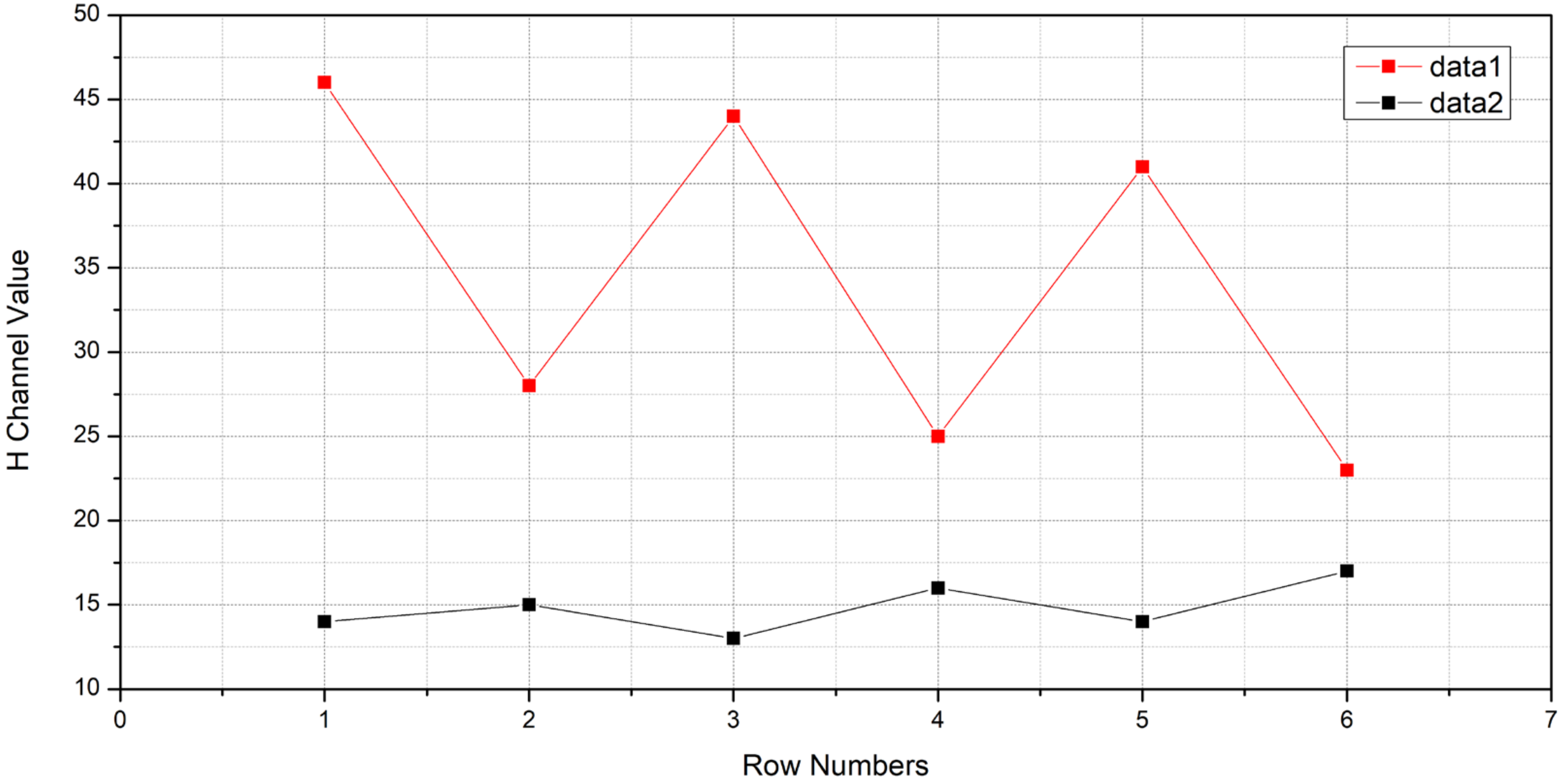
GMMs 기반 색상 분석 결과

$P(\boldsymbol{\omega}_j) = 0.97$

$\mu_j = 17$

Intro

Color analysis



EM(Expectation Maximization) algorithm

가우시안 혼합 모델 추정

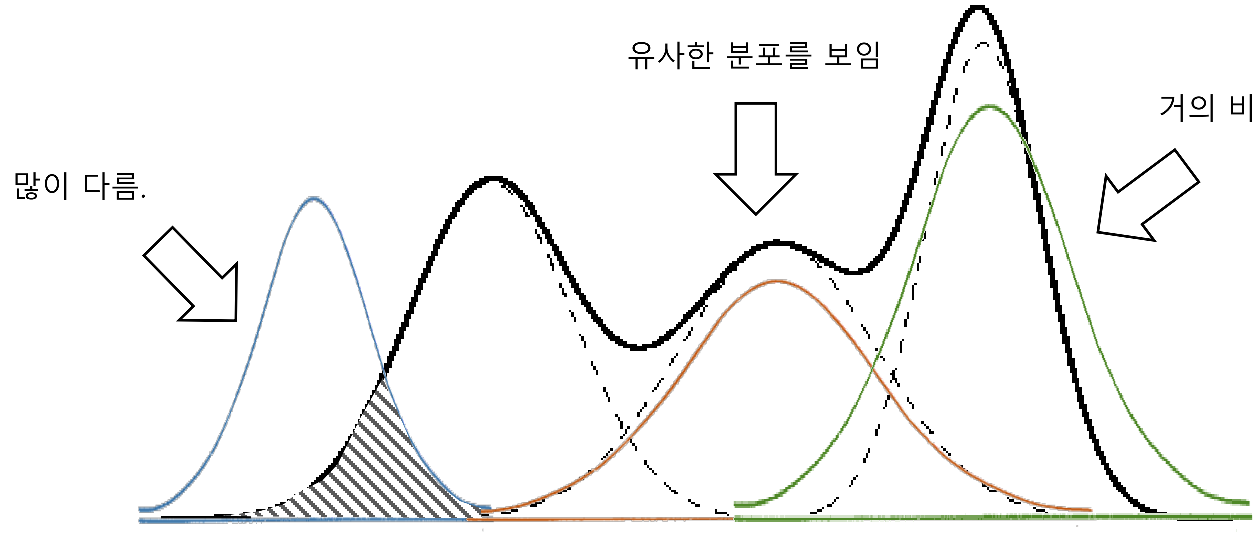
최우추정량을 이용한 가우시안 혼합 모델 추정

로그 우도 E의 θ의 편미분 값이 0이 되는 값들을 이용해 각 가우시안 모델(ω)과 상대적 중요도(α)를 구한다.

$$E = -\sum_{n=1}^{N} \log p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_j = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) x_n}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})} \\ \hat{\sigma}_j^2 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \left\| x_n - \mu_j \right\|^2}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})} \\ \hat{\alpha}_j = \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \end{cases}$$

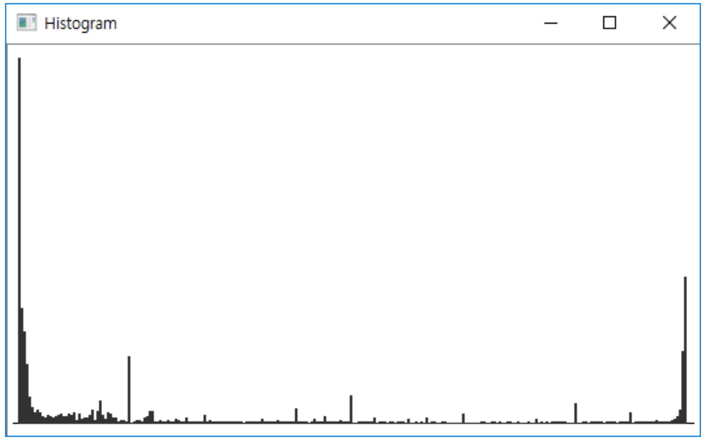
※ $P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) = \dfrac{p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j)\alpha_j}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})}$

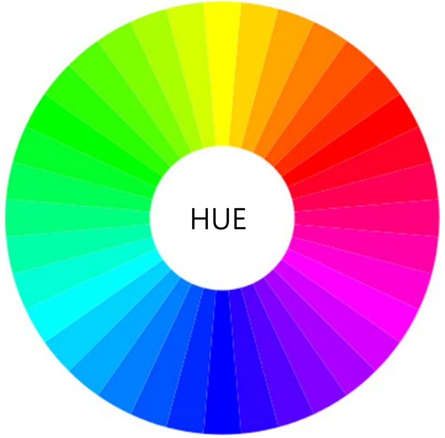


추정(Expectation)된 값이 실제 분포를 얼마나 따라가고 있는가?

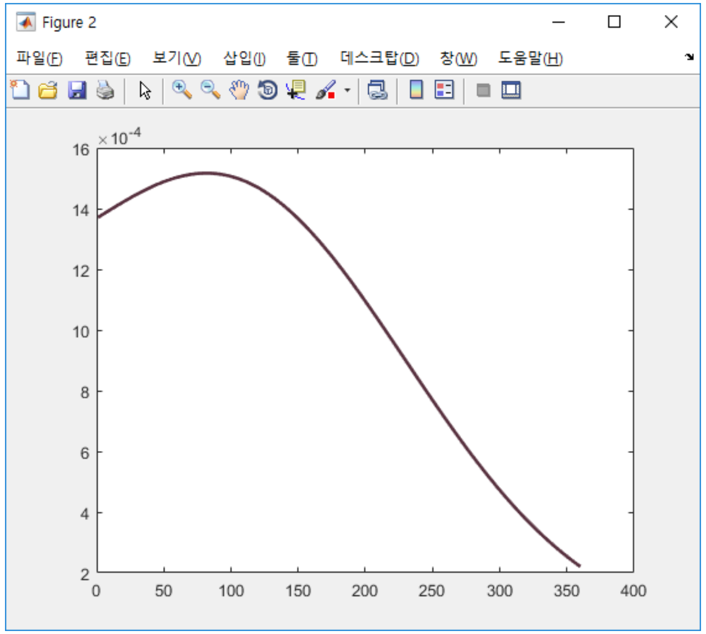
Uncomfortable thing

이건 몇 개?

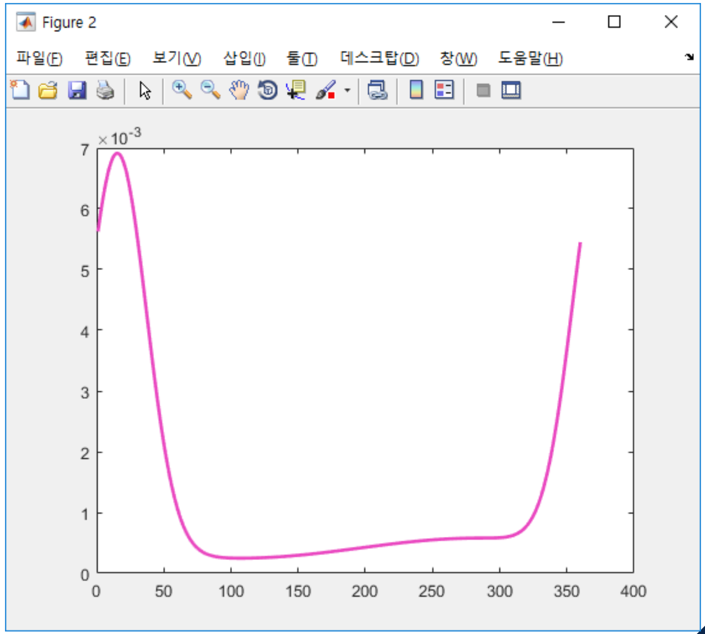




- 가우시안 모델을 1개로 해석

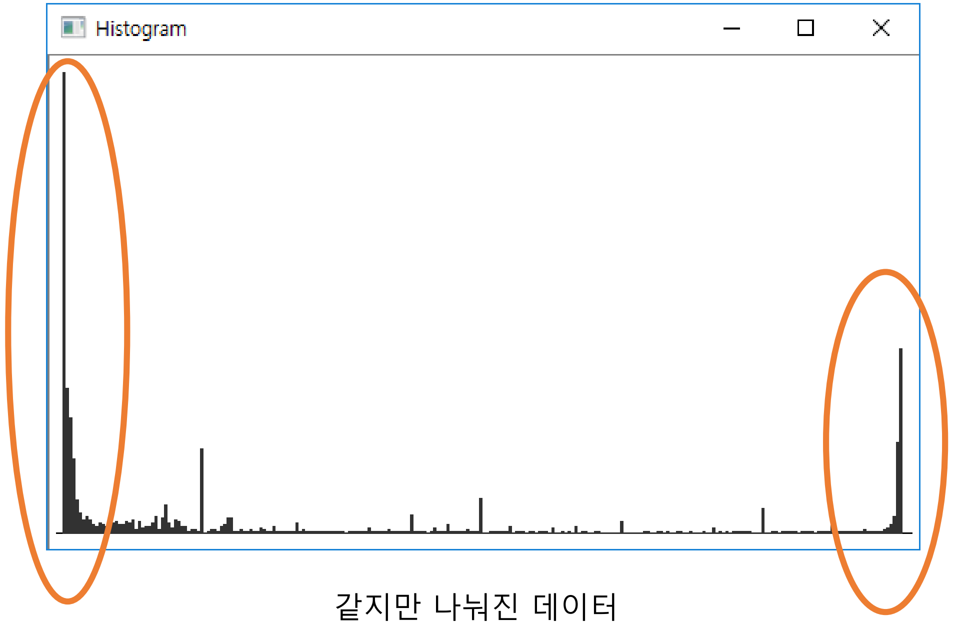


- 가우시안 모델을 2개로 해석

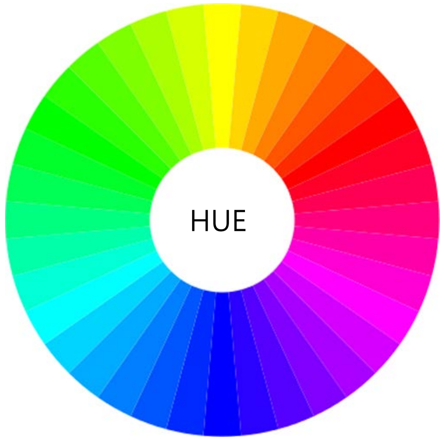


Uncomfortable thing

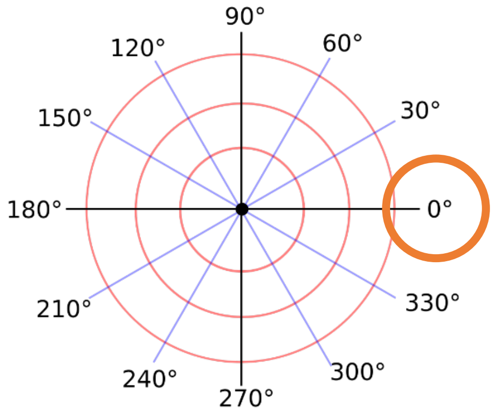
어떻게 해석할 것인가?



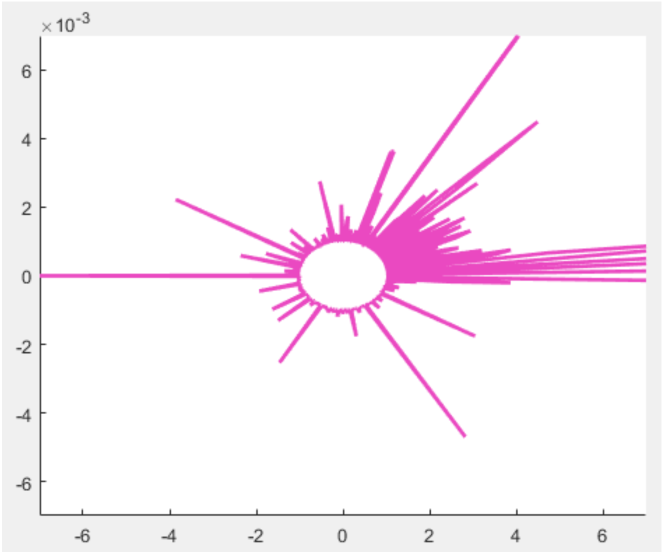
같지만 나눠진 데이터



- 시작과 끝이 연결된 공간에서 해석



극 좌표계



EM algorithm in Polar Coordinate

04

EM 알고리즘 수정

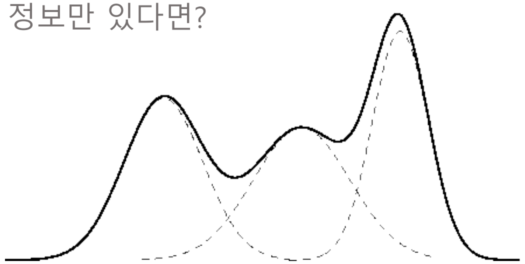
- EM 알고리즘

$$E = -\sum_{n=1}^{N} \log p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_j = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) x_n}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})} \\ \hat{\sigma}_j^2 = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \| x_n - \mu_j \|^2}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})} \\ \hat{\alpha}_j = \dfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \end{cases}$$

※ $P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) = \dfrac{p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j)\alpha_j}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})}$

각 데이터가 얼마나(몇 개) 분포해 있는가 정보가 필요하다.
하지만 분포 정보만 있다면?



- EM 알고리즘(1차 수정)

$$\begin{cases} \hat{\mu}_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} P(\omega_j | x_k, \Theta) x_k \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(x_k | \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)}{\sum_{k=1}^{K} P(\omega_j | x_k, \Theta)} \\ \hat{\sigma}_j^2 = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} P(\omega_j | x_k, \Theta) \| x_k - \mu_j \| \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(x_k | \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)}{\sum_{k=1}^{K} P(\omega_j | x_k, \Theta)} \\ \hat{\alpha}_j = \sum_{k=1}^{K} P(\omega_j | x_k, \Theta) \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(x_k | \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2) \end{cases}$$

각 데이터가 분포 만큼 있다고 판단하도록 수정.

- EM 알고리즘(2차 수정)

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{E}}_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} P(\Omega_j | X_k, \Theta) X_k \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(X_k | \tilde{E}, \tilde{\Sigma}^2)}{\sum_{k=1}^{K} P(\Omega_j | X_k, \Theta)} \\ \hat{\Sigma}_j^2 = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} P(\Omega_j | X_k, \Theta) \| X_k - E_j \| \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(X_k | \tilde{E}, \tilde{\Sigma}^2)}{\sum_{k=1}^{K} P(\Omega_j | X_k, \Theta)} \\ \hat{\alpha}_j = \sum_{k=1}^{K} P(\Omega_j | X_k, \Theta) \sum_{r=1}^{R} \mathrm{N}(X_k | \tilde{E}, \tilde{\Sigma}^2) \end{cases}$$

극 좌표계에 맞춰 수정

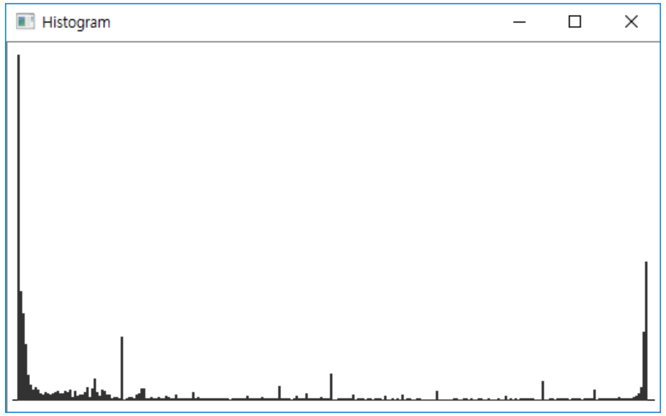
- 데이터 -> 벡터

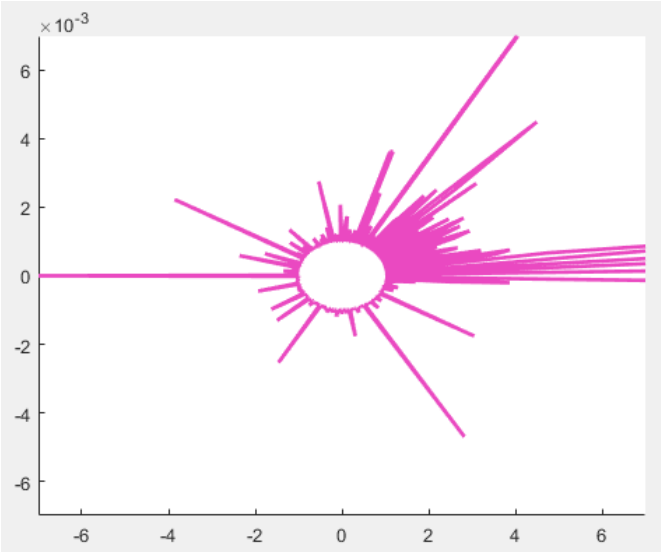
$$x_k \Rightarrow X_k = \begin{bmatrix} i_k \\ j_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_k) \\ \sin(x_k) \end{bmatrix}$$

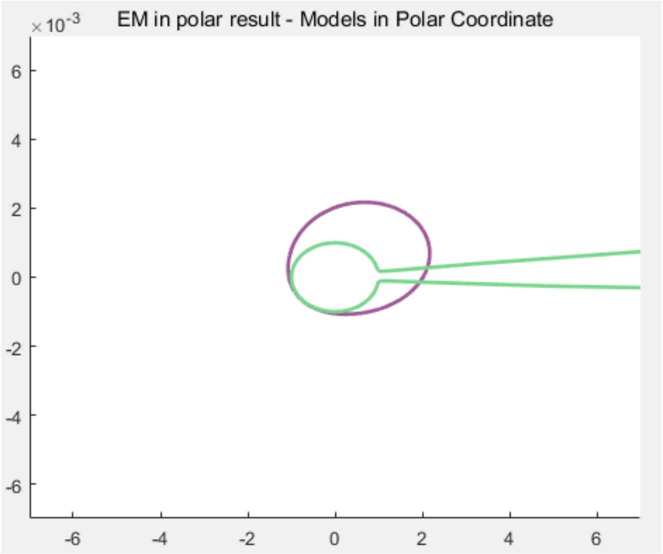
- 분산 -> 2x2 공분산
- 1D 가우시안 분포 -> 2D 가우시안 분포

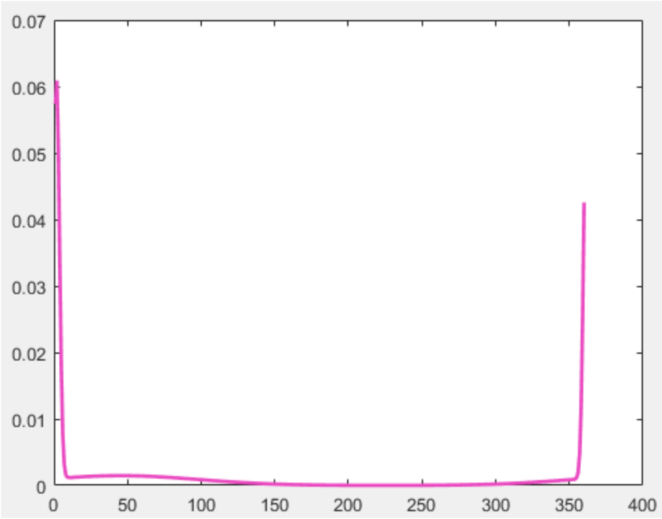
EM algorithm in Polar Coordinate

Color Analysis in Polar Coordinate



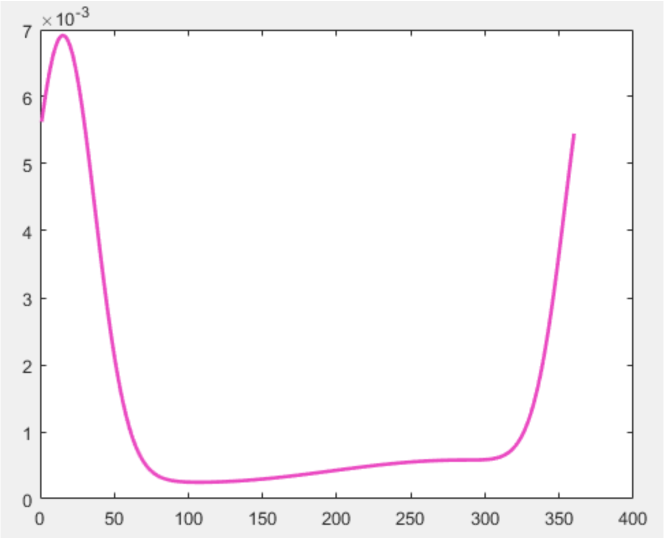


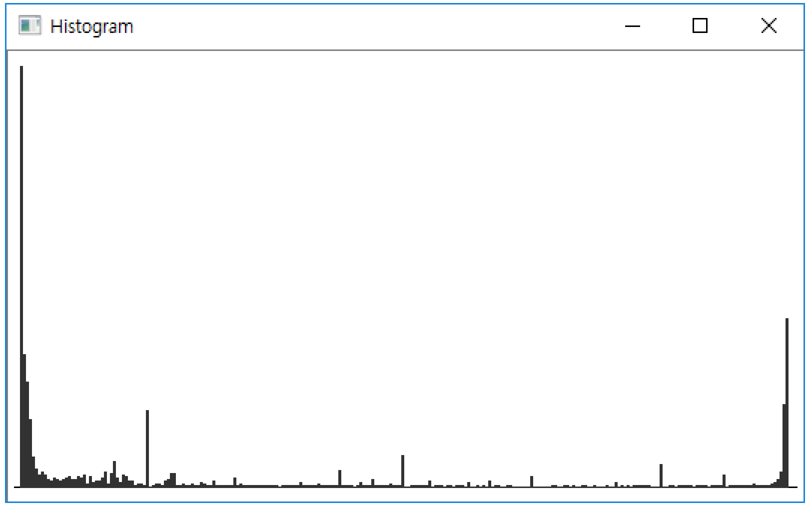


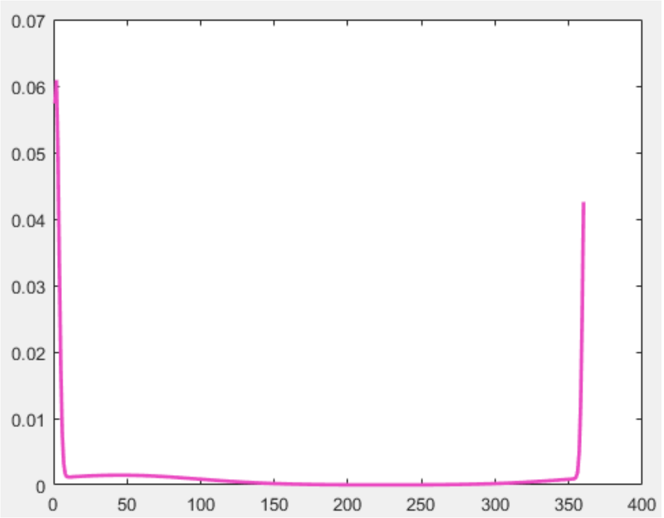


Result

Result#1





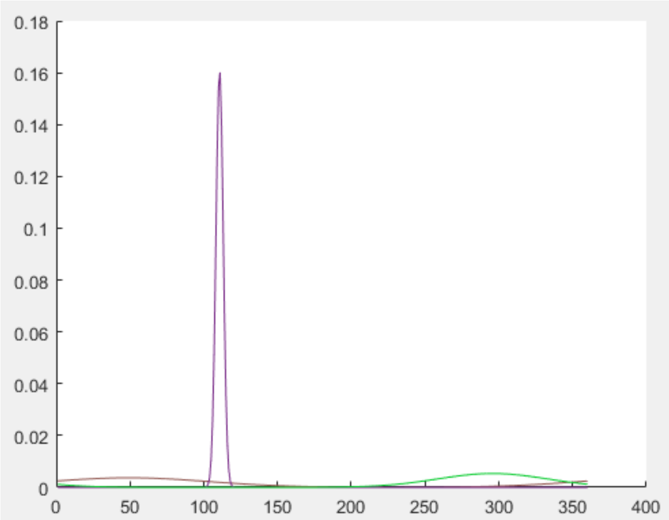


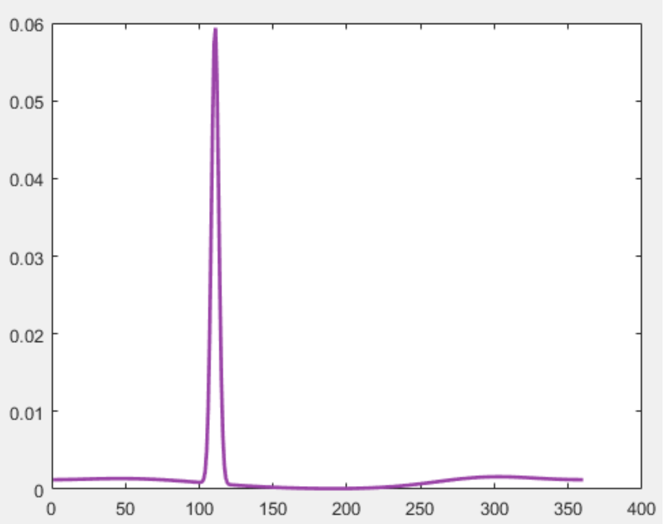
| a | b |
| c | d |

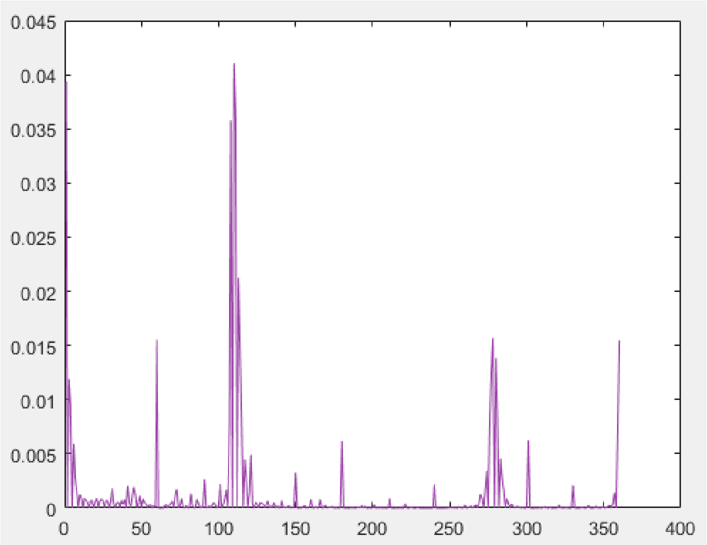
a. 입력 영상
b. 일반 좌표계에서의 추정된 가우시안 혼합 모델 출력
c. 입력영상의 Hue 채널의 히스토그램
d. 극 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 혼합 모델 출력

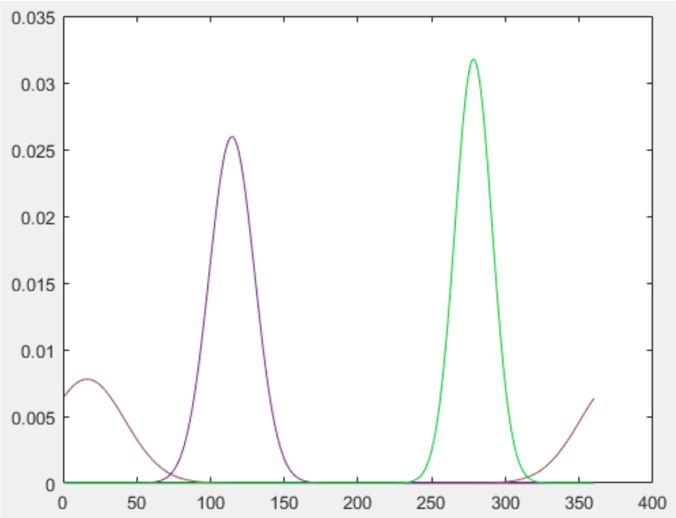
Result

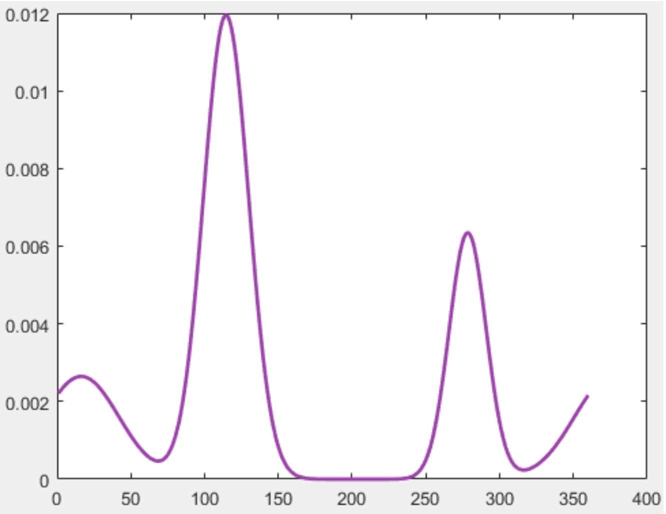
Result#2









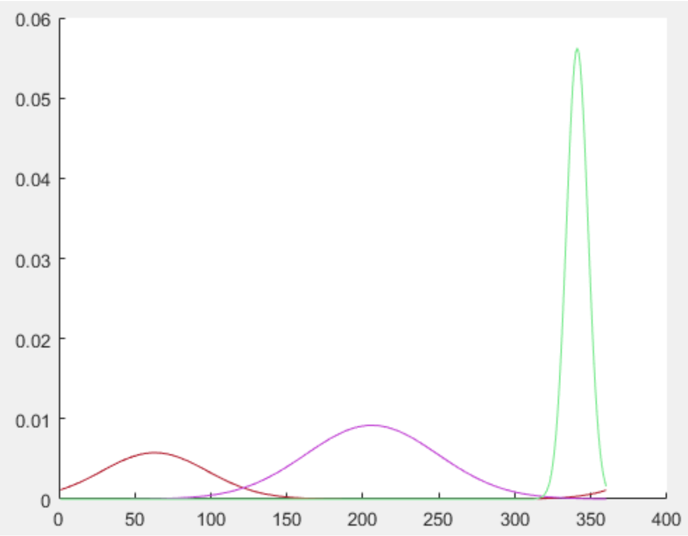


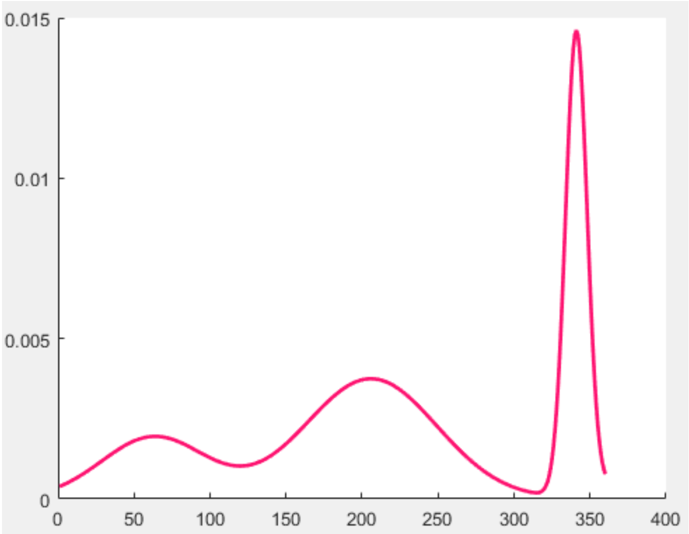
a	b	c
d	e	f

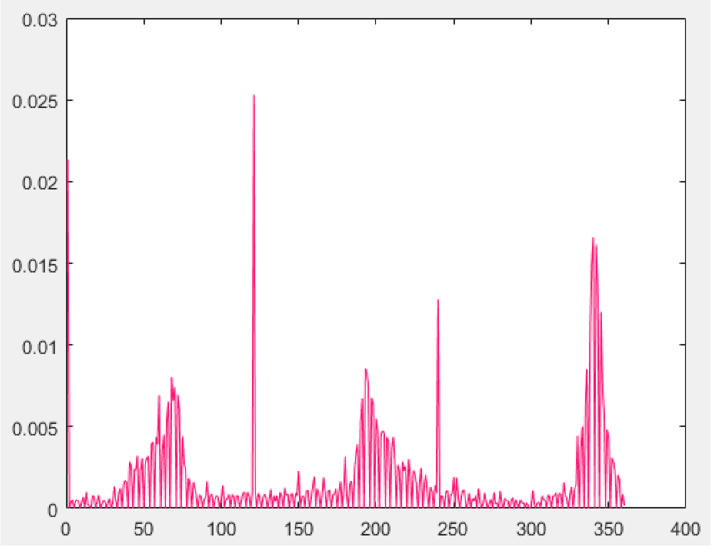
a. 입력 영상
b. 직교 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 모델 출력
c. 직교 좌표계에서의 추정된 가우시안 혼합 모델 출력
d. 입력영상의 Hue 채널의 히스토그램
e. 극 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 모델 출력
f. 극 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 혼합 모델 출력

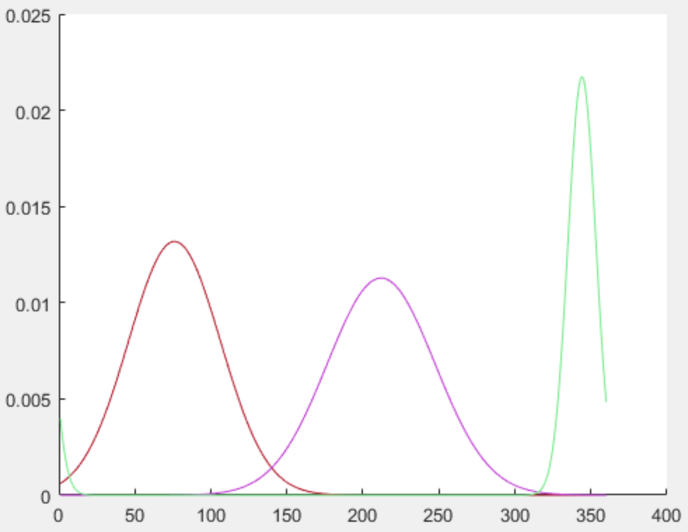
Result

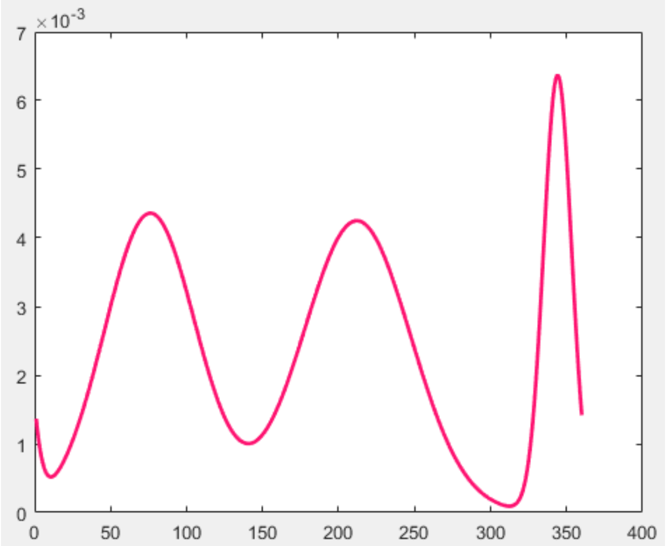
Result#2









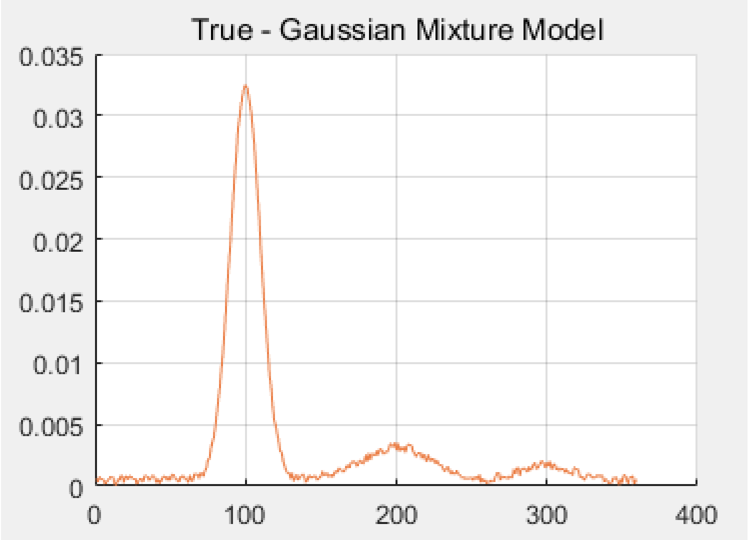


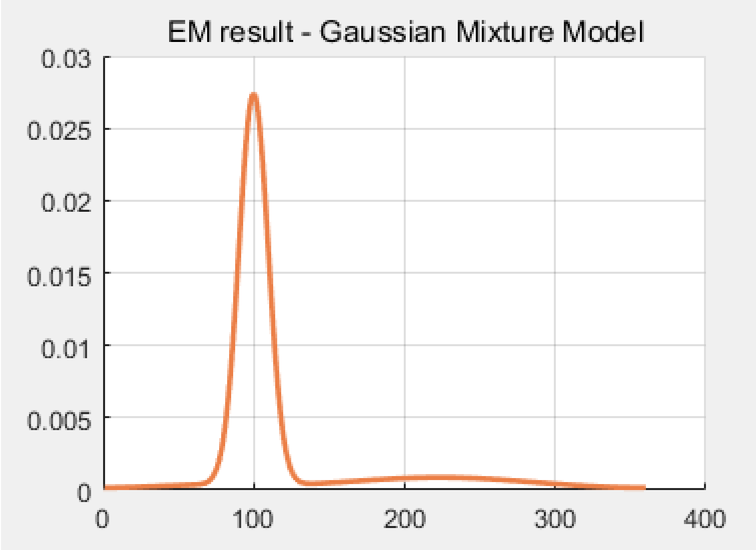
a	b	c
d	e	f

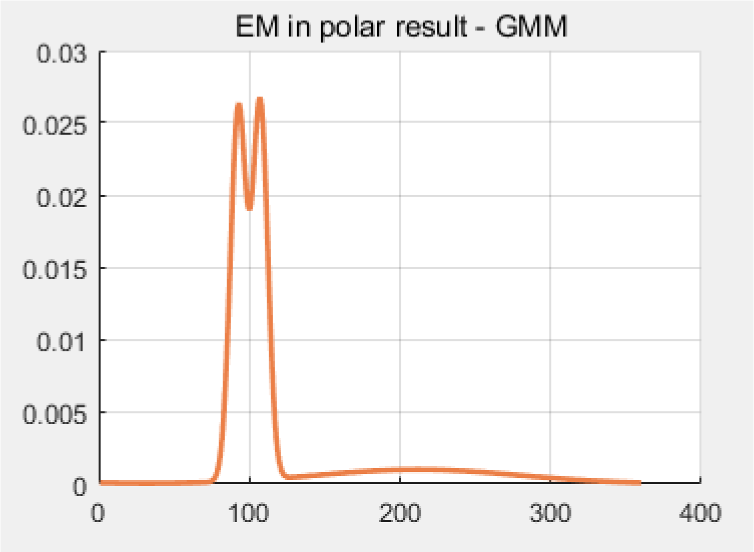
a. 입력 영상
b. 직교 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 모델 출력
c. 직교 좌표계에서의 추정된 가우시안 혼합 모델 출력
d. 입력영상의 Hue 채널의 히스토그램
e. 극 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 모델 출력
f. 극 좌표계에서의 추정된 각 가우시안 혼합 모델 출력

Result

Result#3 : 임의로 생성한 데이터







Conclusion

Conclusion

1. 직교 좌표계에서 EM 알고리즘으로 해석한 가우시안 혼합 모델의 색상 분석 능력의 한계를 확인하였다.
2. 색상 표현 방법을 따라 직교 좌표계의 데이터를 극 좌표계로 변환하고, 새로운 좌표계에서의 EM 알고리즘을 이용한 가우시안 혼합 모델을 해석해 색상 분석을 진행하였다.
3. 0도 근처의 색상 정보가 표함되어 있을 때 색상 분석 성능이 향상되는 것을 확인하였다.

남아 있는 한계

1. 여전히 가우시안 혼합 모델의 개수를 사전에 지정하는 과정이 필요하다.
2. 매우 적은 비중(α)을 갖는 가우시안 모델이 포함될 경우 해석이 어려울 수 있다.

Q & A

EM(Expectation Maximization) algorithm

가우시안 혼합 모델 추정

최우추정량을 이용한 가우시안 혼합 모델 추정

로그 우도 E의 θ의 편미분 값이 0이 되는 값들을 이용해 각 가우시안 모델(ω)과 상대적 중요도(α)를 구한다.

$$E = -\sum_{n=1}^{N} \log p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) x_n}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \left\| x_n - \mu_j \right\|^2}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})}$$

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})$$

$$※\ P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j)\alpha_j}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})}$$

ex) $\hat{\mu}_j$구하기

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{n=1}^{N} \log p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \mu_j} p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})$$

$$p(x \mid \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{M} p(x \mid \boldsymbol{\omega}_j) P(\boldsymbol{\omega}_j)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{j=1}^{M} p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j)\alpha_j$$

$$p(x \mid \omega_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_n-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right)\alpha_j$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_n-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \frac{-2(x_n-\mu_j)}{2\sigma_j^2}(-1)\alpha_j$$

$$p(x \mid \boldsymbol{\omega}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})} p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j) \frac{(x_n-\mu_j)}{\sigma_j^2}\alpha_j$$

$$P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(x_n \mid \boldsymbol{\omega}_j)\alpha_j}{p(x_n \mid \boldsymbol{\theta})}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mu_j} = -\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \frac{(x_n-\mu_j)}{\sigma_j^2}$$

$$-\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) \frac{(x_n-\mu_j)}{\sigma_j^2} = 0$$

$$-\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) x_n + \mu_j \sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) = 0$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta}) x_n}{\sum_{n=1}^{N} P(\boldsymbol{\omega}_j \mid x_n, \boldsymbol{\theta})}$$